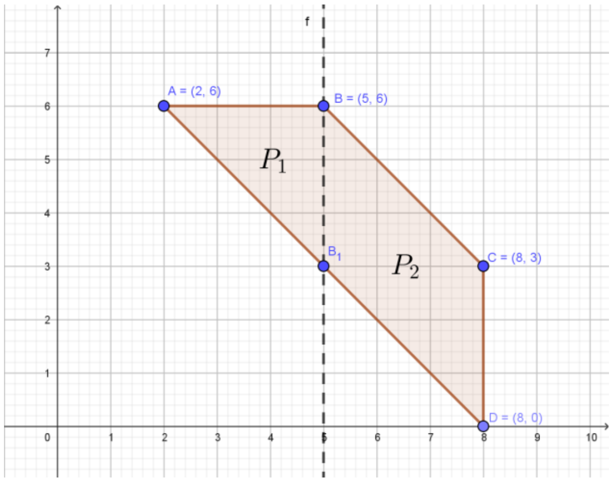
Задача 3. Со помош на определен интеграл да се пресмета плоштината на четириаголникот чии темиња се со координати $A(2;6)$, $B(5;6)$, $C(8;3)$ и $D(8;0)$. (**Задолжително да се направи соодветна скица**).

Решение: Четириаголникот $ABCD$ е даден на следната слика. Правата BB_1, која е паралелна со $y-$оската, го дели четириаголникот на два дела чии плоштини може да се определат со помош на определен интеграл (интеграцијата е по променливата x).



$$P = P_1 + P_2 = \int_2^5 [p_{AB}(x) - p_{AD}(x)]dx + \int_5^8 [p_{BC}(x) - p_{AD}(x)]dx\,.$$

Равенка на права низ точки $T_1(x_1, y_1)$ и $T_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \underset{\text{за интеграција по } x}{\Rightarrow} \boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}.$$

1) $p_{AB}(x)$: права низ $A(\overset{x_1}{2};\overset{y_1}{6})$ и $B(\overset{x_2}{5};\overset{y_2}{6})$

$$y = \frac{\overset{=0}{6-6}}{5-2}(x-2) + 6 = 6 \Rightarrow \boxed{p_{AB}(x) = 6},$$

2) $p_{BC}(x)$: права низ $B(\overset{x_1}{5};\overset{y_1}{6})$ и $C(\overset{x_2}{8};\overset{y_2}{3})$

$$y = \frac{3-6}{8-5}(x-5) + 6 = \frac{-3}{3}(x-5) + 6 = -(x-5) + 6 = -x + 11 \Rightarrow \boxed{p_{BC}(x) = -x + 11},$$

3) $p_{AD}(x)$: права низ $A(\overset{x_1}{2};\overset{y_1}{6})$ и $D(\overset{x_2}{8};\overset{y_2}{0})$

$$y = \frac{0-6}{8-2}(x-2) + 6 = \frac{-6}{6}(x-2) + 6 = -(x-2) + 6 = -x + 8 \Rightarrow \boxed{p_{AD}(x) = -x + 8},$$

Од предходното следи дека

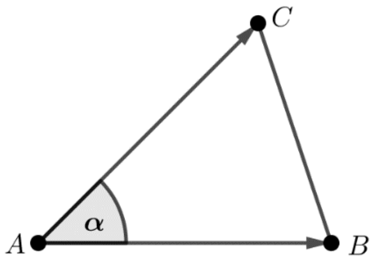
$$P = \int_2^5 [6 - (-x+8)]dx + \int_5^8 [(-x+11) - (-x+8)]dx = \int_2^5 (x-2)dx + \int_5^8 3dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{x=2}^{x=5} + 3x\Bigg|_{x=5}^{x=8} = \left[\left(\frac{5^2}{2} - 2\cdot 5\right) - \left(\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right)\right] + 3(8-5)$$

$$= [(12{,}5 - 10) - (2 - 4)] + 3 = 13{,}5 \text{ кв.ед.}$$

Задача 4.А. Да се определи плоштината и внатрешниот агол кај темето A на триаголникот со темиња $A(-1;7;5)$, $B(-3;5;5)$ и $C(-3;7;3)$.

Решение:



1) $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$,

2) $P = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-3;5;5) - (-1;7;5) = (-2;-2;0)$,

$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (-3;7;3) - (-1;7;5) = (-2;0;-2)$,

Од тука следи:

$$1)\ \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-2)\cdot(-2) + (-2)\cdot 0 + 0\cdot(-2)}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} rad .$$

2)

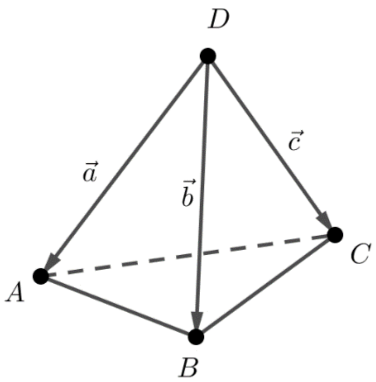
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right|$$

$$= 4\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} - 4\vec{k} - 0\cdot\vec{i} - 4\vec{j} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = (4;-4;-4).$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-4)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16+16+16} = \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 16} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ кв.ед.}$$

Задача 4.Б. Да се пресмета волуменот на тетраедарот со темиња во точките $A(3;-4;1)$, $B(4;-5;4)$, $C(3;-1;3)$ и $D(1;-2;-1)$.



Решение: $V = \dfrac{1}{6}\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|$, каде

$\vec{a} = \overrightarrow{DA} = \vec{r}_A - \vec{r}_D = (3;-4;1) - (1;-2;-1) = (2;-2;-2)$,

$\vec{b} = \overrightarrow{DB} = \vec{r}_B - \vec{r}_D = (4;-5;4) - (1;-2;-1) = (3;-3;5)$,

$\vec{c} = \overrightarrow{DC} = \vec{r}_C - \vec{r}_D = (3;-1;3) - (1;-2;-1) = (2;1;4)$.

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 5 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right|$$

$$= -24 - 20 + 6 - (-12) - 10 - (-24) = -12$$

од каде следи дека $V = \dfrac{1}{6}\cdot|-12| = 2$ куб.ед.

Задача 5. Да се определи равенка на рамнината која минува низ точката $A(4,2,1)$ и е паралелна со правите

$$p_1:\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{5}=\frac{z-4}{0} \qquad \text{и} \qquad p_2:\begin{cases} x+3z-5=0 \\ 5x+2y+z=0 \end{cases}.$$

Решение: Бараната равенка на рамнина се определува од изразот

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0,$$

каде x_1,y_1,z_1 се координатите на $A(\overset{x_1}{4},\overset{y_1}{2},\overset{z_1}{1})$, l_1,m_1,n_1 се координатите на носечкиот вектор на правата $p_1:\ \dfrac{x-2}{\underset{=l_1}{-2}}=\dfrac{y}{\underset{=m_1}{5}}=\dfrac{z-4}{\underset{=n_1}{0}}$, а l_2,m_2,n_2 се координатите на носечкиот вектор на правата

$$p_2:\begin{cases} x+3z-5=0 \\ 5x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overset{A_1}{1}\cdot x+\overset{B_1}{0}\cdot y+\overset{C_1}{3}\cdot z-5=0 \\ \underset{A_2}{5}\cdot x+\underset{B_2}{2}\cdot y+\underset{C_2}{1}\cdot z=0 \end{cases},$$

кои се треба да се определат.

$$\left.\begin{aligned} l_2&=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0-6=-6 \\ m_2&=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=15-1=14 \\ n_2&=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=2-0=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (l_2,m_2,n_2)=(-6;14;2)=2\cdot(-3;7;1).$$

И двата вектори $(-6;14;2)$ и $(-3;7;1)$ се носечки вектори на правата p_2 и било кој може да се искористи за пополнување на третата редица во детерминантата со која се определува бараната равенка. Подолу во детерминантата се искористени координатите на векторот $(-3;7;1)$.

$$\begin{aligned} 0&=\left|\begin{matrix} x-4 & y-2 & z-1 \\ -2 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x-4 & y-2 \\ -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{matrix} \\ &=5(x-4)+0\cdot(y-2)-14(z-1)-(-15)\cdot(z-1)-0\cdot(z-4)-(-2)\cdot(y-1) \\ &=5(x-4)+2(y-1)+(z-1) \\ &=5x+2y+z-25 \end{aligned}$$

Односно, бараната равенка на рамнина е $5x+2y+z-25=0$.

Задача 6. Да се определи радиусот на конвергенција, интервалот на конвергенција и испита конвергенцијата во крајните граници на интервалот на степенскиот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+2)^n}{2n+3}.$$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+2)^n}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3\left(x+\frac{2}{3}\right)\right]^n}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n+3}\left(x+\frac{2}{3}\right)^n.$$

- $a=-\frac{2}{3}$ - центар на редот
- низата коефициенти $(a_n)_{n\geq 0}$ е со членови

$$a_0=0 \text{ и } a_n=\frac{3^n}{2n+3},\quad n\geq 1.$$

1) радиус на конвергенција:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{2n+3}}{\frac{3^{n+1}}{2(n+1)+3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n+5)}{3^{n+1}(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{2n+3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\cancelto{0}{\frac{5}{n}}}{2+\cancelto{0}{\frac{3}{n}}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

2) интервал на (апсолутна) конвергенција:

$$(a-R,a+R)=\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\left(-1;-\frac{1}{3}\right).$$

3) конвергенција во крајни граници на интервалот на конвергенција:

- за $x=-1$ се добива бројниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3\cdot(-1)+2)^n}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n\text{, каде } b_n=\frac{1}{2n+3}. \tag{1}$$

- за $x=-\frac{1}{3}$ се добива бројниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2\right)^n}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{2n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}, \tag{2}$$

(редот во (2) е редот од апсолутни вредности на редот во (1)).

Бидејќи $2n+3\leq 2n+3n=5n\ (\forall n\in\mathbb{N})$, важи $\frac{1}{5n}\geq\frac{1}{2n+3}\ (\forall n\in\mathbb{N})$. Од тука следи дека

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ – дивергира (хармонискиот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ е дивергентен).

Од тука воедно следи дека $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{\ n}}{2n+3}$ не е апсолутно конвергентен. Останува да се провери дали тој е условно конвергентен според Лајбницовиот критериум.

(i) $b_n = \frac{1}{2n+3}, n \in \mathbb{N}$ е низа со позитивни членови,

(ii) $b_n = \frac{1}{2n+3}, n \in \mathbb{N}$ строго монотоно опаѓа бидејќи $2n+3 \leq 2(n+1)+3, \forall n \in \mathbb{N}$ и, последователно, $b_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+3} \leq \frac{1}{2n+3} = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$

Од (i)-(iii), според Лајбницовиот критериум, следи дека $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{\ n}}{2n+3}$ конвергира (но само условно).

Заклучок: Дадениот ред конвергира на интервалот $\left[-1; -\frac{1}{3}\right)$, а апсолутно конвергира само на интервалот $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$.

Задача 7. По ***сопствен избор*** да се реши ***само една*** од диференцијалните равенки:

а) $(2-\cos x)y^2 y' = (y^3+1)\sin x$,

б) $(x-4)y' - y = x^2 - 16$,

в) $(\sqrt{x+2} - 2xy^2)dx + \left(\frac{1}{\sqrt{y+2}} - 2x^2 y\right)dy = 0$.

Решение:

а)

$$(2-\cos x)y^2 y' = (y^3+1)\sin x \ \Rightarrow \ (2-\cos x)y^2 \frac{dy}{dx} = (y^3+1)\sin x \ \big/ (\ ) \cdot \frac{dx}{(2-\cos x)(y^3+1)}$$

$$\Rightarrow \ \frac{y^2}{y^3+1}dy = \frac{\sin x}{2-\cos x}dx \ \text{(промен. се раздвоени)}$$

1) $$\int \frac{y^2}{y^3+1}dy = \left| \begin{array}{l} \text{смена:} \\ y^3+1 = t \\ 3y^2 dy = dt \ \Rightarrow \ y^2 dy = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t = \ln t^{1/3} = \ln(y^3+1)^{1/3},$$

2)

$$\int \frac{\sin x}{2-\cos x}dx = \left| \begin{array}{l} \text{смена:} \\ 2-\cos x = z \\ -(-\sin x)dx = dz \ \Rightarrow \ \sin x dx = dz \end{array} \right| = \int \frac{dz}{z} = \ln z + \ln C = \ln(Cz)$$

$$= \ln[C(2-\cos x)]$$

$$\ln(y^3+1)^{1/3} = \ln[C(2-\cos x)] \quad \Rightarrow \quad (y^3+1)^{1/3} = C(2-\cos x)\,,\ C>0$$

$$\Rightarrow \quad y^3+1 = [C(2-\cos x)]^3\,,\ C>0$$

$$\Rightarrow \quad y^3 = [C(2-\cos x)]^3 - 1\,,\ C>0$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{[C(2-\cos x)]^3 - 1}\,,\ C>0$$

б)

$$(x-4)y' - y = x^2 - 16 \quad /(\,):(x-4) \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{x-4} = \frac{x^2-16}{x-4},$$

$$\Rightarrow \quad y' + \left(-\frac{1}{x-4}\right)y = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4}$$

$$\Rightarrow \quad y' + \left(-\frac{1}{x-4}\right)y = x+4\,.$$

Последната равенка е ЛДР за $P(x) = -\dfrac{1}{x-4}$ и $Q(x) = x+4$ и нејзиното општо решение е

$$y = \frac{1}{\rho}\left[\int Q(x)\rho dx + C\right], \quad \rho = e^{\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

1) $\displaystyle\int P(x)dx = \int\left(-\frac{1}{x-4}\right)dx = -\int\frac{1}{x-4}dx = -\ln(x-4)\,,$

2) $\displaystyle\rho = e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln(x-4)} = \frac{1}{e^{\ln(x-4)}} = \frac{1}{x-4}\,,$

3) $\displaystyle\int Q(x)\rho dx = \int(x+4)\cdot\frac{1}{x-4}dx = \int\frac{x+4}{x-4}dx = \int\frac{x-4+4+4}{x-4}dx$

$$= \int\left(1+\frac{8}{x-4}\right)dx = \int dx + 8\int\frac{dx}{x-4} = x + 8\ln(x-4)$$

Од 1) – 3) следи дека општото решение на дадената равенка е

$$y = \frac{1}{\frac{1}{x-4}}\ \ x+8\ln(x-4)+C\ = (x-4)\ \ x+8\ln(x-4)+C\ , \quad C\in\mathbb{R}\,.$$

в) $\displaystyle\underbrace{(\sqrt{x+2}-2xy^2)}_{=P(x,y)}dx + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{y+2}}-2x^2y\right)}_{=Q(x,y)}dy = 0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x+2}-2xy^2) = 0 - 2x\cdot 2y = -4xy\\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{y+2}}-2x^2y\right) = 0 - 2\cdot(2x)\cdot y = -4xy\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

и, последователно, дадената ДР е во тотален диференцијал, па нејзиното општо решение ќе биде

$$A + B = C, \quad C\in\mathbb{R}\,,$$

каде

1) $A=\int P(x,y)dx=\int(\sqrt{x+2}-2xy^2)dx=\int\sqrt{x+2}\,dx-2y^2\int xdx$

$$=\int(x+2)^{1/2}dx-2y^2\cdot\frac{x^2}{2}=\left|\begin{array}{l}\text{смена:}\\ x+2=t\\ dx=dt\end{array}\right|=\int t^{1/2}dt-x^2y^2=\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}-x^2y^2$$

$$=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-x^2y^2$$

2) $\dfrac{\partial A}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-x^2y^2\right]=0-x^2\cdot 2y=-2x^2y$,

3) $B=\int\left[Q(x,y)-\dfrac{\partial A}{\partial y}\right]dy=\int\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{y+2}}-2x^2y\right)-(-2x^2y)\right]dy=\int\dfrac{dy}{\sqrt{y+2}}$

$$=\int(y+2)^{-1/2}dy=\left|\begin{array}{l}\text{смена:}\\ y+2=z\\ dy=dz\end{array}\right|=\int z^{-1/2}dz=\frac{z^{-1/2+1}}{-1/2+1}=2\sqrt{z}=2\sqrt{y+2}$$

Од 1) – 3) следи дека општото решение на дадената равенка е

$$\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-x^2y^2+2\sqrt{y+2}=C,\quad C\in\mathbb{R}.$$