① Да се најди n-ти извод на функцијата $f(x)=\ln(4x+7)$ и напи-ши нејзиниот Маклоренов полином од трети степен

Решение:

$$f^{(I)}(x)=[\ln(4x+7)]'=\frac{1}{4x+7}\cdot\underbrace{(4x+7)'}_{=4+0=4}=\frac{4}{4x+7}$$

$$=(4x+7)^{-1}\cdot 4^{1}=\frac{(-1)}{(-1)}\cdot(4x+7)^{-1}\cdot 4^{1}$$

$$f^{(II)}(x)=[(4x+7)^{-1}\cdot 4]'=(-1)(4x+7)^{-2}\cdot\overbrace{\underbrace{(4x+7)'}_{=4}\cdot 4}^{=4\cdot 4=4^2}$$

$$=(-1)(4x+7)^{-2}\cdot 4^{2}=\frac{(-1)\cdot(-2)}{(-2)}\cdot(4x+7)^{-2}\cdot 4^{2}$$

$$f^{(III)}(x)=[(-1)\cdot(4x+7)^{-2}\cdot 4^{2}]'=(-1)\cdot(-2)\cdot(4x+7)^{-3}\cdot\overbrace{(4x+7)'\cdot 4^{2}}^{=4\cdot 4^2=4^3}$$

$$=(-1)\cdot(-2)\cdot(4x+7)^{-3}\cdot 4^{3}=\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{(-3)}\cdot(4x+7)^{-3}\cdot 4^{3}$$

$$f^{(IV)}(x)=[(-1)\cdot(-2)\cdot(4x+7)^{-3}4^{3}]'=(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(4x+7)^{-4}\cdot\overbrace{(4x+7)'\cdot 4^{3}}^{=4\cdot 4^3=4^4}$$

$$=(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(4x+7)^{-4}\cdot 4^{4}=\frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{(-4)}\cdot(4x+7)^{-4}\cdot 4^{4}$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)}{(-n)}\cdot(4x+7)^{-n}\cdot 4^{n}=\frac{(-1)^{n}\,n!}{(-1)\cdot n}\cdot(4x+7)^{-n}4^{n}$$

$$=\frac{(-1)^{\cancel{n}\;n-1}(n-1)!\cdot\cancel{n}}{\cancel{(-1)}\cdot\cancel{n}}\cdot(4x+7)^{-n}\cdot 4^{n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,4^{n}}{(4x+7)^{n}}$$

за $n\in\mathbb{N}$ (формулата за n-ти извод не важи за $n=0$)

Маклоренов полином од трет степен:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$f(0) = \ln(4 \cdot 0 + 7) = \ln 7$$

$$f'(0) = \frac{4}{4 \cdot 0 + 7} = \frac{4}{7}$$

преку општата формула за n-ти извод:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}\cancel{(n-1)}! \cdot 4^n}{\underbrace{n!}_{= n \cdot \cancel{(n-1)!}}(4x+7)^n} = \frac{(-1)^{n-1}4^n}{n(4x+7)^n}$$

Од тука следи дека:

$$f''(0) = \frac{(-1)^{2-1} \cdot 4^2}{2 \cdot (4 \cdot 0 + 7)^2} = -\frac{4^2}{2 \cdot 7^2}$$

$$f'''(0) = \frac{(-1)^{3-1} \cdot 4^3}{3 \cdot (4 \cdot 0 + 7)^3} = \frac{4^3}{3 \cdot 7^3}$$

и, последователно

$$f(x) \approx \ln 7 + \frac{4}{7}x - \frac{4^2}{2 \cdot 7^2}x^2 + \frac{4^3}{3 \cdot 7^3}x^3$$