**Дополнителни вежби по Математика 2, 15.03.2022**

---

Да се испита конвергенцијата на неправите интеграли:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[8]{(5x+1)^3}}$, б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^5}}$.

Решение:

$$\text{а) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[8]{(5x+1)^3}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} (5x+1)^{-3/8}dx = \left| \begin{array}{l} \text{смена: } \boxed{5x+1=t} \\ 5dx=dt \;\;\Rightarrow\;\; dx=\frac{dt}{5} \\ 1)\;\; x=0 \;\;\Rightarrow\;\; t=5\cdot 0+1=1 \\ 2)\;\; x=b \;\;\Rightarrow\;\; t=5b+1 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{5b+1} t^{-3/8}\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\cdot \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{5b+1} t^{-3/8}dt = \frac{1}{5}\cdot \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{t^{-3/8+1}}{-\frac{3}{8}+1} \right|_{t=1}^{t=5b+1}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{8}{5}\cdot \lim_{b\to+\infty} \left. \sqrt[8]{t^5} \right|_{t=1}^{t=5b+1} = \frac{8}{25}\cdot \lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[8]{(5b+1)^5} - \sqrt[8]{1^5}\right)$$

$$= \frac{8}{25}\cdot(+\infty - 1) = +\infty$$

т.е. дадениот интеграл дивергира.

$$\text{б) } \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^5}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} (2x+1)^{-5/3}dx = \left| \begin{array}{l} \text{смена: } \boxed{2x+1=t} \\ 2dx=dt \;\;\Rightarrow\;\; dx=\frac{dt}{2} \\ 1)\;\; x=0 \;\;\Rightarrow\;\; t=2\cdot 0+1=1 \\ 2)\;\; x=b \;\;\Rightarrow\;\; t=2b+1 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{2b+1} t^{-5/3}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{2b+1} t^{-5/3}dt = \frac{1}{2}\cdot \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{t^{-5/3+1}}{-\frac{5}{3}+1} \right|_{t=1}^{t=2b+1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \right|_{t=1}^{t=2b+1} = -\frac{3}{4}\cdot \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(2b+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot(0-1) = \frac{3}{4}$$

т.е. дадениот интеграл конвергира.